A. A. Ershov, O. A. Kuvshinov, On properties of intersection of α-sets, *Izv. IMI UdGU*, 2020, Volume 55, 79–92

DOI: https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-06

Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 55. С. 79–92

УДК 517.977

© *А. А. Ершов, О. А. Кувшинов*

О СВОЙСТВАХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ α-МНОЖЕСТВ

В работе изучаются свойства α-множеств, являющихся одним из обобщений выпуклых множеств. В первой части работы доказана равносильность двух определений α-множеств на плоскости. Вторая часть работы посвящена экспериментальному изучению свойств односвязных пересечений α-множеств. Из результатов численных экспериментов следует, что значение меры невыпуклости α у односвязного пересечения двух α-множеств может быть больше исходного значения α у пересекаемых множеств даже при весьма близких к нулю этих значений. По данным результатам можно выдвинуть гипотезу, что, во-первых, такое увеличение значения α возможно при сколь угодно малом «исходном» α у пересекаемых множеств, во-вторых, данное увеличение ограничено линейной функцией от «исходного» значения α.

Ключевые слова: обобщенно-выпуклое множество, α-множество, пересечение множеств.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-06

Введение

α-множества были введены в 2000-х годах учеными Института математики и механики УрО РАН для классификации множеств достижимости управляемых систем по степени их невыпуклости [1]. α-множества являются одним из видов так называемых обобщенно выпуклых множеств. К таким множествам также относятся слабо- и сильно-выпуклые множества по Виалю и по Ефимову–Стечкину [2], линейно выпуклые множества в пространстве над полем комплексных чисел [3], α-паравыпуклые множества Э. Майкла [4, 5], созданные на их основе функционально паравыпуклые множества [6] и многие другие.

Заметим, что многие обобщенно-выпуклые множества имеют числовые меры невыпуклости, причем эти меры часто взаимосвязаны между собой. Например, в теореме 3.3.2 из [2, § 3.3] доказано соотношение между паравыпуклым множествами и слабовыпуклыми множествами, а в работе [7] установлена взаимосвязь между α-множествами и паравыпуклыми множествами Э. Майкла. А именно, в [7] доказано, что если рассматривать произвольное α-множество как $\hat{\alpha}$-паравыпуклое множество, то $\hat{\alpha} \geqslant 1 - \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Прикладная значимость в теории управления и актуальность изучения α-множеств также основываются на двух предположениях, что, во-первых, для некоторых управляемых систем степень невыпуклости α у множеств достижимости растет постепенно с течением времени (аналог теоремы 3.6.2 из [2, гл. 3, § 3.6]), а во-вторых, α-множества обладают свойствами, полезными для решения задач (в качестве аналога можно отметить работы [8–10]).

Несмотря на то что первое предположение на данный момент не доказано, выявление класса таких управляемых систем не представляется принципиально сложным и может быть перспективным исследованием. Настоящая работа посвящена изучению новых потенциально полезных свойств α-множеств, а именно измерению меры невыпуклости односвязного пересечения α-множеств.

Заметим, что вопрос о свойствах пересечения множеств является значимым разделом негладкого анализа и он неоднократно изучался многими известными учеными.

Из современных работ, изучающих пересечение обобщенно-выпуклых множеств, отметим монографию [3]. В ней изучаются такие обобщения выпуклости как линейно выпуклые множества и сильно выпуклые множества в пространстве над полем комплексных чисел. Относительно свойств пересечений таких множеств в данной монографии, в частности, доказаны следующие два утверждения. А именно, предложение 2.17 о том, что пересечение произвольной совокупности линейно выпуклых множеств линейно выпукло, и следствие 11.2, утверждающее, что пересечение сильно линейно выпуклых множеств может не быть сильно линейно выпуклым множеством. В области исследований пересечений слабовыпуклых множеств отметим монографию [2]. В ней приведена лемма 1.3.6, в которой доказано, что пересечение слабовыпуклых множеств по Ефимову–Стечкину остается слабовыпуклым, и причем с той же константой. Кроме того, в лемме 1.3.7 доказано, что пересечение множества, слабовыпуклого по Виалю, и сильно выпуклого множества является слабовыпуклым по Виалю. В примере 1.3.1 показывается, что пересечение двух слабовыпуклых по Виалю множеств может не быть слабовыпуклым по Виалю.

Также исследование свойств счетного пересечения множеств проведено в примерах 4.1, 4.2 и в лемме 4.1 из работы [12] для так называемых регулярных по пересечению множеств.

Определенные исследования проведены и для пересечений самих α-множеств. Например, в работе [13] доказана лемма 1 о том, что непустое пересечение α-множества, являющегося графиком непрерывной функции, и вертикальной полосы также является α-множеством с той же постоянной α.

§ 1. Альтернативные определения α-множеств на плоскости

Далее мы будем использовать следующие стандартные обозначения [11].

Посредством $\operatorname{co} M$ обозначим выпуклую оболочку множества M, $\langle x_*, x^* \rangle$ — скалярное произведение x_* и x^* из $\mathbb{R}^n$, $||x_*|| = \langle x_*, x_* \rangle^{1/2}$ — стандартную норму (порожденную скалярным произведением) в евклидовом пространстве, $\angle(x_*, x^*) = \arccos \dfrac{\langle x_*, x^* \rangle}{||x_*|| \cdot ||x^*||} \in [0, \pi]$ — угол между векторами x_* и x^*, $\operatorname{con} M = \{y = \lambda x \colon \lambda \geqslant 0, x \in M\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество M и с вершиной в нуле.

Под проекцией p^* точки x^* на множество M мы понимаем ближайшую к x^* точку из M. Множество всех проекций точки x^* на множество M обозначим через $\Omega_M(z^*)$.

Отметим, что множество проекций $\Omega_M(z^*)$ может быть несчетным для невыпуклого множества M или пустым для открытого множества M. Если $z^* \in M$, то $\Omega_M(z^*) = \{z^*\}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество. Биссектрисой множества M назовем множество точек из $\mathbb{R}^n \backslash M$, имеющих более одной проекции на M.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Через $H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)$ обозначим конус, натянутый на множество $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* \colon z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$. Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Тогда множество A назовем α-множеством, где $\alpha = \alpha_A$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Определим функцию

$$\alpha_A(z^*) = \pi \text{ в случае, если } z^* \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*),$$

и

$$\alpha_A(z^*) = \max_{x, y \in \Omega_A(z^*)} \angle(x - z^*, y - z^*) \text{ — в противном случае.}$$

Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Тогда множество A назовем α-множеством, где $\alpha = \alpha_A$.

Т е о р е м а 1.1. *Определения* 1.2 *и* 1.3 *равносильны для α-множеств в* $\mathbb{R}^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что:
во-первых, $\max\limits_{h_*,h^*\in H_A(z^*)} \angle(h_*,h^*) = \pi$ при $z^* \in (\operatorname{co}\Omega_A(z^*))\setminus A$,
во-вторых, $\max\limits_{h_*,h^*\in H_A(z^*)} \angle(h_*,h^*) = \max\limits_{x,y\in\Omega_A(z^*)} \angle(x-z^*,y-z^*)$ при $z^* \notin \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $z^* \in (\operatorname{co}\Omega_A(z^*))\setminus A$. Тогда по определению радиус-вектор z^* представим в виде линейной комбинации некоторого числа $n \geqslant 2$ радиус-векторов точек из A, т. е.

$$z^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, $\alpha_k > 0$, $x_k \in \Omega_A(z^*)$, $k = \overline{1,n}$. Положим $h_* = \alpha_1(x_1 - z^*) \in H_A(z^*)$ и $h^* = -h_*$.

Заметим, что таким образом определенный вектор $h^* \in H_A(z^*)$, поскольку

$$h^* = -h_* = \alpha_1(z^* - x_1) = z^* - \alpha_1 x_1 - z^* + \alpha_1 z^* = (1-\alpha_1)\Big(\frac{1}{1-\alpha_1}(z^* - \alpha_1 x_1) - z^*\Big) =$$

$$= (1-\alpha_1)\Big(\sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k - z^*\Big),$$

где $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1} x_k \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$, так как $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_1} = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} = 1$.

При этом $\angle(h_*,h^*) = \pi$, так как $h_* \uparrow\downarrow h^*$.

Рассмотрим второй случай. Пусть

$$z^* \notin (\operatorname{co}\Omega_A(z^*)). \tag{1.1}$$

Тогда существуют такие (возможно, совпадающие) точки $x_1,\ x_2 \in \Omega_A(z^*)$, что угол $\angle(x_1 - z^*, x_2 - z^*) = \max\limits_{x,y\in\Omega_A(z^*)} \angle(x-z^*,y-z^*)$. Отметим, что максимум достигается по теореме Вейерштрасса, поскольку функция $f(x,y) = \angle(x-z^*,y-z^*)$ непрерывна и определена на компакте $\Omega_A(z^*)$ (в свою очередь $\Omega_A(z^*)$ является компактом как замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$).

Предположим, что существуют векторы $h_*, h^* \in H_A(z^*)$ такие, что выполнено неравенство $\angle(h_*,h^*) \geqslant \angle(x-z^*,y-z^*)$ для любых x и y из $\Omega_A(z^*)$.

Докажем вначале, что тогда $h_* \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*)\colon \lambda > 0\}$.

По определению множества $H_A(z^*)$ вектор $h_* = \lambda_*(z_1 - z^*)$, где $z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$, $\lambda_* \geqslant 0$. Если $\lambda_* = 0$, то $h_* = 0$ и, по нашему соглашению, $\angle(h_*,h^*) = 0$, т. е. мы попадаем в тривиальный случай. Поэтому далее будем считать, что $\lambda_* = 1$, так как от величины положительного λ_* угол $\angle(h_*,h^*)$ не зависит. По теореме Каратеодори (см., например, [11, теорема 1.14.1]) радиус-вектор точки z_1 может быть выражен в виде линейной комбинации всего трех векторов, т. е. $z_1 = \sum\limits_{k=1}^{3} \alpha_k x_k$, где $x_k \in \Omega_A(z^*)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = \overline{1,3}$.

Итак,

$$h_* = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k x_k - z^* = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k (x_k - z^*). \tag{1.2}$$

Рассмотрим три вектора: $x_1 - z^*$, $x_2 - z^*$ и $x_3 - z^*$. За исключением тривиального случая, хотя бы один из них, к примеру $x_1 - z^*$, ненулевой. Поскольку их число превышает размерность пространства $\mathbb{R}^2$, равную двум, то существует такая их линейная комбинация, что

$$x_1 - z^* + k_2(x_2 - z^*) + k_3(x_3 - z^*) = 0, \quad k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Возможны четыре случая.

1. Пусть $k_1 \geqslant 0$ и $k_2 \geqslant 0$. Тогда

$$x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = z^* + k_2z^* + k_3z^*.$$

Отсюда

$$z^* = \frac{1}{1+k_2+k_3}x_1 + \frac{k_2}{1+k_2+k_3}x_2 + \frac{k_3}{1+k_2+k_3}x_3,$$

что означает, что $z^* \in \operatorname{co} A$, а это противоречит (1.1).

2. Пусть $k_2 < 0$, $k_3 \geqslant 0$. Тогда

$$x_2 - z^* = -\frac{1}{k_2}(x_1 - z^*) - \frac{k_3}{k_2}(x_3 - z^*).$$

3. Пусть $k_2 \geqslant 0$, $k_3 < 0$. Тогда

$$x_3 - z^* = -\frac{1}{k_3}(x_1 - z^*) - \frac{k_2}{k_3}(x_2 - z^*).$$

4. Пусть $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$. Тогда

$$x_1 - z^* = -k_2(x_2 - z^*) - k_3(x_3 - z^*).$$

Итак мы получаем, что во всех допустимых случаях (т. е. в случаях 2, 3 и 4) один из векторов $x_1 - z^*$, $x_2 - z^*$ и $x_3 - z^*$ выражается через остальные два с неотрицательными коэффициентами. Исключая его из выражения (1.2), получаем, что

$$h_* = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2, \tag{1.3}$$

где $\beta_1 + \beta_2 = 1$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, $\omega_1 \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*) \colon \lambda > 0\}$, $\omega_2 \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*) \colon \lambda > 0\}$.

Если $\beta_1 = 0$ или $\beta_2 = 0$, то тогда $h_* \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*) \colon \lambda > 0\}$.

Если $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$, то будем иметь, что

$$\frac{1}{\beta_1+\beta_2}h_* = \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\omega_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\omega_1.$$

Обозначив через $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}$ и $\widetilde{h}_* = \dfrac{1}{\beta_1+\beta_2}h_*$, получим, что

$$\widetilde{h}_* = \beta\omega_1 + (1-\beta)\omega_2, \quad 0 < \beta < 1.$$

Для доказательства включения $h_* \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*) \colon \lambda > 0\}$ достаточно показать, что $\widetilde{h}_* \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*) \colon \lambda > 0\}$.

Исследуем функцию $\angle(\widetilde{h}_*, h^*)$ на экстремум относительно аргумента β на отрезке $[0,1]$. Если максимум $\angle(\widetilde{h}_*, h^*)$ достигается на краях этого отрезка, то отсюда будет следовать, что он достигается при $\widetilde{h}_* \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*) \colon \lambda > 0\}$. Также ясно, что максимум угла

$$\angle(\widetilde{h}_*, h^*) = \arccos\frac{\langle\widetilde{h}_*, h^*\rangle}{\|\widetilde{h}_*\| \cdot \|h^*\|}$$

может достигаться только в точке экстремума функции

$$g(\beta)=\left(\frac{\langle\widetilde{h}_*,h^*\rangle}{\|\widetilde{h}_*\|\cdot\|h^*\|}\right)^2=\frac{\big(\beta\langle\omega_1,h^*\rangle+(1-\beta)\langle\omega_2,h^*\rangle\big)^2}{\beta^2||\omega_1||^2+2\beta(1-\beta)\,\langle\omega_1,\omega_2\rangle+(1-\beta)^2||\omega_2||^2}.$$

Ее производная

$$g'(\beta)=\frac{2(\beta\langle\omega_1,h^*\rangle+(1-\beta)\langle\omega_2,h^*\rangle)(\langle\omega_1,h^*\rangle-\langle\omega_2,h^*\rangle)}{\beta^2||\omega_1||^2+2\beta(1-\beta)\langle\omega_1,\omega_2\rangle+(1-\beta)^2||\omega_2||^2)^2}\times$$

$$\times\big(2\beta||\omega_1||^2+(2(1-\beta)-2\beta)\langle\omega_1,\omega_2\rangle-2(1-\beta)||\omega_2||^2\big)=$$

$$=\frac{2\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle\cdot\langle\omega_1-\omega_2,h^*\rangle}{||\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^2}-$$

$$-\frac{2(\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle)^2\cdot\langle\omega_1-\omega_2,\omega_2+\beta(\omega_1-\omega_2)\rangle}{||\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^4}=$$

$$=\frac{2\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle}{\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^2}\cdot\langle\omega_1-\omega_2,h^*-\frac{\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle}{||\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^2}\big(\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2\big)\rangle.$$

Экстремум функции $g(\beta)$ может достигаться либо на концах отрезка $\beta=0$ и $\beta=1$, но тогда вектор $\widetilde{h}_*$ совпадает с ω_1 или ω_2, либо в некоторой точке $\beta\in(0,1)$, для которой выполнено условие

$$g'(\beta)=0. \tag{1.4}$$

В свою очередь равенство (1.4) может быть выполнено только лишь в следующих случаях.

1. $\omega_1=\omega_2$. В этом случае $\widetilde{h}_*=\omega_1=\omega_2$, и в силу (1.3) мы получаем, что

$$\widetilde{h}_*\in\{\lambda(\Omega_A(z^*)-z^*)\colon\lambda>0\}.$$

2. $h^*\uparrow\uparrow\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2$. В этом случае $\widetilde{h}_*=h^*$, а угол между ними нулевой, откуда, в частности, следует, что множество $\Omega_A(z^*)$ содержит единственный элемент, $\operatorname{co}\Omega_A(z^*)$ совпадает с $\Omega_A(z^*)$ и, соответственно, $\widetilde{h}_*\in\{\lambda(\Omega_A(z^*)-z^*):\lambda>0\}$.

3. $\omega_1-\omega_2\perp h^*-\dfrac{\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle}{||\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^2}\big(\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2\big)$. В этом случае заметим, что вектор $\dfrac{\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle}{||\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^2}\big(\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2\big)$ является проекцией вектора h^* на вектор $\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2$. Следовательно, разность вектора h^* и его проекции на вектор $\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2$ будет перпендикулярна вектору $\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2$. Кроме того, непосредственной проверкой несложно показать, что скалярное произведение

$$\left\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*-\frac{\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle}{||\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^2}\big(\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2\big)\right\rangle=0,$$

то есть

$$\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2\perp h^*-\frac{\langle\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2,h^*\rangle}{||\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2||^2}\big(\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2\big).$$

Таким образом, условие 3 эквивалентно условию, что $\omega_1-\omega_2\,||\,\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2$. Однако $\beta\omega_1+(1-\beta)\omega_2=\beta(\omega_1-\omega_2)-\beta\omega_2$, причем очевидно, что $\omega_1-\omega_2\,||\,\beta(\omega_1-\omega_2)$. Отсюда следует, что выполнение условия 3 возможно только в случае, если $\omega_2\,||\,\omega_1-\omega_2$ или, что то же самое, $\omega_1\,||\,\omega_2$ (для ненулевых ω_1 и ω_2). Из (1.3) следует, что в данном случае также $\widetilde{h}_*\in\{\lambda(\Omega_A(z^*)-z^*)\colon\lambda>0\}$.

Итак, мы доказали, что если неравенство

$$\angle(h_*, h^*) \geqslant \angle(x - z^*, y - z^*)$$

выполняется для любых x и y из $\Omega_A(z^*)$, то $h_* \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*)\colon \lambda > 0\}$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в этом случае

$$h^* \in \{\lambda(\Omega_A(z^*) - z^*)\colon \lambda > 0\}.$$

Отсюда следует, что $\max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) = \max\limits_{x,y \in \Omega_A(z^*)} \angle(x - z^*, y - z^*)$ при $z^* \notin \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$.

Таким образом, мы рассмотрели всевозможные случаи и завершили доказательство теоремы. □

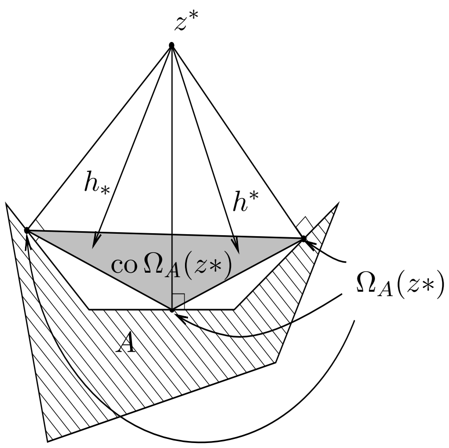

Рис. 1. Множества $\Omega_A(z^*)$ и $\operatorname{co}\Omega_A(z^*)$

Замечание 1. Фактически доказываемое утверждение о том, что при $z^* \notin \operatorname{co}\Omega_A(z^*)$

$$\max_{h_*, h^* \in (\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)} \angle(h_*, h^*) = \max_{x,y \in \Omega_A(z^*)} \angle(x - z^*, y - z^*),$$

на рис. 1 выглядит вполне очевидным. Однако строгое аналитическое доказательство этого факта не столь очевидно.

Замечание 2. Определение 1.3 для α-множества в пространстве размерности 3 и выше не является эквивалентным определению 1.2. Рассмотрим в качестве контрпримера множество M, являющееся боковой поверхностью тетраэдра $ABCD$ и состоящее из объединения трех равнобедренных треугольников ΔABD, ΔACD, ΔBCD (вместе с их границей) в трехмерном пространстве (рис. 2).

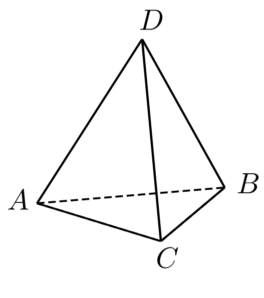

Рис. 2. Тетраэдр $ABCD$

Пусть лежащий в основании треугольник ΔABC является правильным, а вершина D удалена от него на достаточно большое расстояние. Тогда при стремлении этого расстояния к бесконечности по определению 1.2 мера невыпуклости α для множества M стремится к $\frac{2\pi}{3}$, а по определению 1.3 — к числу π.

§ 2. Численное исследование пересечений α-множеств

Экспериментальное измерение меры невыпуклости α у пересечения двух α-множеств проводилось на примере двух зеркально отраженных относительно вертикали кругов с вырезанным сектором (рис. 3).

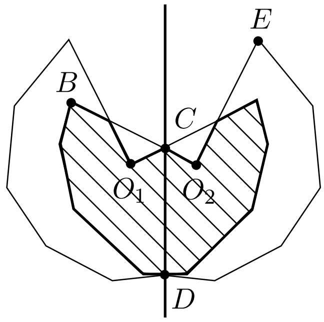

Рис. 3. Пересечение двух кругов с вырезанными секторами. Здесь $\angle O_1O_2B = \angle O_2O_1C$ — угол поворота, $\angle BO_2E$ — угол вырезанного сектора, $|O_1O_2|$ — расстояние между центрами, прямая CD — прямая отражения пересекаемых кругов с вырезанными секторами относительно друг друга

Если принять радиус этих кругов за условные 100 единиц, то в качестве расстояния между центрами пересекаемых кругов с вырезанными секторами была рассмотрена величина в 20 и 40 единиц. Для каждой из этих величин было проведено по 99 численных экспериментов. В них угловая мера вырезанного сектора варьировалась от 90 до 170 градусов с шагом в 10 градусов, угол поворота этих фигур (кругов с вырезанными секторами) варьировался с шагом в 5 градусов.

Пересечение данных фигур было предствлено в виде многоугольников на плоскости с помощью компьютерной программы «Программный комплекс для вычисления пересечения двух многоугольников, аппроксимирующих два круга с вырезанными секторами» [14], вычисление значения α проводилось с помощью компьютерной программы «Программный комплекс для вычисления меры невыпуклости альфа для альфа-множеств» [15].

Результаты экспериментов представлены в следующей таблице.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов по пересечению кругов с вырезанными секторами при расстоянии между центрами, равном 20

Номер эксперимента	Вырезанный сектор γ (в градусах)	Угол поворота β (в градусах)	Степень невыпуклости α (в радианах)	Приращение $\Delta\alpha$ (в радианах)
1	90	0	$0\ \pi$	$-0.5\ \pi$
2	90	5	$0.5\ \pi$	$0\ \pi$
3	90	10	$0.5\ \pi$	$0\ \pi$
4	90	15	$0.5\ \pi$	$0\ \pi$
5	90	20	$0.5\ \pi$	$0\ \pi$
6	90	25	$0.556\ \pi$	$0.056\ \pi$

Номер эксперимента	Вырезанный сектор γ (в градусах)	Угол поворота β (в градусах)	Степень невыпуклости α (в радианах)	Приращение $\Delta\alpha$ (в радианах)
7	90	30	0.667 π	0.167 π
8	90	35	0.612 π	0.112 π
9	90	40	0.557 π	0.057 π
10	90	45	0.501 π	0.001 π
11	90	50	0.5 π	0 π
12	100	0	0 π	-0.445 π
13	100	5	0.445 π	0 π
14	100	10	0.445 π	0 π
15	100	15	0.445 π	0 π
16	100	20	0.446 π	0.001 π
17	100	25	0.555 π	0.11 π
18	100	30	0.557 π	0.112 π
18	100	35	0.501 π	0.056 π
20	100	40	0.445 π	0 π
21	100	45	0.445 π	0 π
22	100	50	0.445 π	0 π
23	110	0	0 π	-0.389 π
24	110	5	0.389 π	0 π
25	110	10	0.389 π	0 π
26	110	15	0.389 π	0 π
27	110	20	0.444 π	0.055 π
28	110	25	0.501 π	0.112 π
29	110	30	0.445 π	0.056 π
30	110	35	0.389 π	0 π
31	110	40	0.389 π	0 π
32	110	45	0.389 π	0 π
33	110	50	0.389 π	0 π
34	120	0	0 π	-0.334 π
35	120	5	0.334π	0 π
36	120	10	0.334 π	0 π
37	120	15	0.335 π	0.001 π
38	120	20	0.444 π	0.11 π
39	120	25	0.39 π	0.056 π
40	120	30	0.334 π	0 π
41	120	35	0.334 π	0 π
42	120	40	0.334 π	0 π
43	120	45	0.334 π	0 π
44	120	50	0.334 π	0 π
45	130	0	0 π	-0.278 π
46	130	5	0.278 π	0 π
47	130	10	0.278 π	0 π
48	130	15	0.333 π	0.055 π
49	130	20	0.334 π	0.056 π
50	130	25	0.278 π	0 π
51	130	30	0.278 π	0 π
52	130	35	0.278 π	0 π
53	130	40	0.278 π	0 π
54	130	45	0.278 π	0 π

Номер эксперимента	Вырезанный сектор γ (в градусах)	Угол поворота β (в градусах)	Степень невыпуклости α (в радианах)	Приращение $\Delta\alpha$ (в радианах)
55	130	50	0.278 π	0 π
56	140	0	0 π	-0.222 π
57	140	5	0.223 π	0.001 π
58	140	10	0.223 π	0.001 π
59	140	15	0.278 π	0.056 π
60	140	20	0.222 π	0 π
61	140	25	0.222 π	0 π
62	140	30	0.222 π	0 π
63	140	35	0.222 π	0 π
64	140	40	0.222 π	0 π
65	140	45	0.222 π	0 π
66	140	50	0.222 π	0 π
67	150	0	0 π	-0.167 π
68	150	5	0.167 π	0 π
69	150	10	0.222 π	0.053 π
70	150	15	0.167 π	0 π
71	150	20	0.167 π	0 π
72	150	25	0.167 π	0 π
73	150	30	0.167 π	0 π
74	150	35	0.167 π	0 π
75	150	40	0.167 π	0 π
76	150	45	0.167 π	0 π
77	150	50	0.167 π	0 π
78	160	0	0 π	-0.111 π
79	160	5	0.112 π	0.001 π
80	160	10	0.111 π	0 π
81	160	15	0.111 π	0 π
82	160	20	0.111 π	0 π
83	160	25	0.111 π	0 π
84	160	30	0.111 π	0 π
85	160	35	0.111 π	0 π
86	160	40	0.111 π	0 π
87	160	45	0.111 π	0 π
88	160	50	0.111 π	0 π
89	170	0	0.056 π	0 π
90	170	5	0.056 π	0 π
91	170	10	0.056 π	0 π
92	170	15	0.056 π	0 π
93	170	20	0.056 π	0 π
94	170	25	0.056 π	0 π
95	170	30	0.056 π	0 π
96	170	35	0.056 π	0 π
97	170	40	0.056 π	0 π
98	170	45	0.056 π	0 π
99	170	50	0.056 π	0 π

В случае расстояния между центрами кругов с вырезанными секторами в 40 единиц результаты совпали, за исключением измерения № 10 (таблица 2).

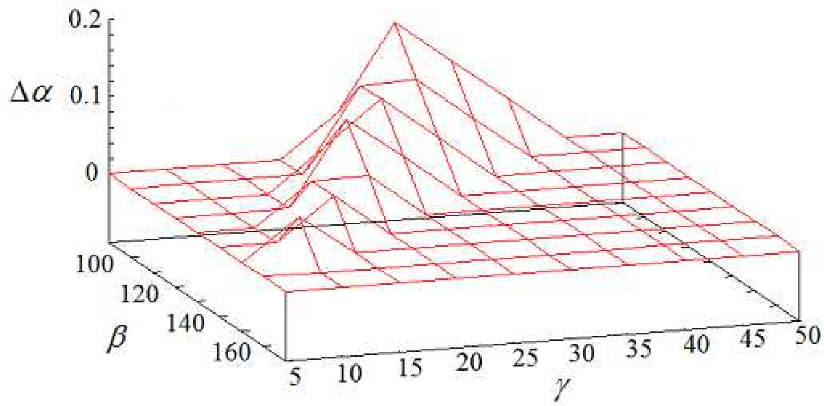

Рис. 4. Зависимость приращения $\Delta\alpha$ у пересечения в зависимости от угла поворота γ и углового размера вырезанного сектора β

Таблица 2. Результаты численных экспериментов по пересечению кругов с вырезанными секторами при расстоянии между центрами, равном 40

Номер эксперимента	Вырезанный сектор γ (в градусах)	Угол поворота β (в градусах)	Степень невыпуклости α (в радианах)	Приращение $\Delta\alpha$ (в радианах)
10	90	5	$0\,\pi$	$0\,\pi$

Графическое представление результатов из таблицы 1 изображено на рис. 4.

§ 3. Описание численного алгоритма

Опишем алгоритм программы [15]. Как известно, граница многоугольника представляет собой замкнутую ломанную, состоящую из последовательно соединенных концами отрезков. По алгоритму на первом шаге выбирается величина ε, затем для каждого такого отрезка строится граница ε-окрестности в виде овала. Точки пересечения всех границ овалов проверяются на принадлежность к биссектрисе исследуемого множества. Значение ε перебирается от 0.5 до 200 с шагом в 0.01. В итоге для многоугольника M вместо точного значения $\alpha_M = \sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^n\setminus A} \alpha_A(z^*)$ мы будем иметь приближенное значение $\widetilde{\alpha}_M = \max\{\alpha_M(z^*)\colon z^* \in \partial M_\varepsilon,\ \varepsilon = 0.01k,\ k = \overline{50, 200000}\}$, где ∂M_ε — граница ε-окрестности M.

З а м е ч а н и е 3. Погрешность вычисления α не превосходит суммы двух величин: погрешности, вносимой при замене рассматриваемой фигуры на многоугольник, и погрешности вычисления меры невыпуклости α для многоугольника. В данном случае первая величина равна нулю, поскольку «вырез» не изменялся, а аппроксимация внешней окружности ломаной не изменяет величину α, так как на внешней окружности или ломаной может располагаться только единственная проекция точки z^*, не принадлежащей исследуемому множеству.

Заметим, что для множеств M, у которых $\alpha_M = \pi$, величина $\widetilde{\alpha}_M$ может быть весьма далека от π. Например, если M — кольцо (или многоугольник, приближающий кольцо в хаусдорфовой метрике), то центр кольца может не попасть в нашу систему границ окрестностей, и тогда $\widetilde{\alpha}_M$ будет равно нулю (или близко к нулю для аппроксимирующего многоугольника). Тем не менее для множеств M, у которых $\alpha_M < \pi$, величина $\widetilde{\alpha}_M$ будет стремиться к α_M при уменьшении шага по ε в силу полунепрерывности сверху функции $\alpha_M(z^*)$ [16, свойство 2]. Однако количественная оценка скорости такой сходимости на данный момент является актуальной задачей, и все приведенные значения в таблицах 1 и 2 являются в известной мере предполагаемыми.

§ 4. Заключение

В данной работе введено новое определение для α-множеств на плоскости и строго доказано, что оно равносильно исходному определению.

Если принять гипотезу о сходимости применяемого численного метода, то можно сделать вывод о том, что односвязное пересечение любых двух α-множеств может иметь меру невыпуклости $\hat{\alpha} > \alpha$. Однако проведенные эксперименты не противоречат более слабой гипотезе о том, что величина $\hat{\alpha}$ не превосходит 2α, либо некоторой другой мажорирующей функции $f(\alpha)$. Нахождение функции $f(\alpha)$, а также определение погрешности численного вычисления величины α являются интересными для дальнейшего исследования математическими задачами.

Авторы благодарят В. Н. Ушакова за постановку задачи и полезные обсуждения.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–01–00221 А. Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Успенский А. А., Ушаков В. Н., Фомин А. Н. α-множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-B2004.
2. Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006.
3. Зелинский Ю. Б. Выпуклость. Избранные главы. Киев: Институт математики НАН Украины, 2012.
4. Michael E. Paraconvex sets // Mathematica Scandinavica. 1959. Vol. 7. No. 2. P. 312–315. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10583
5. Ngai H. V., Penot J.-P. Paraconvex functions and paraconvex sets // Studia Mathematica. 2008. Vol. 184. No. 1. P. 1–29. https://doi.org/10.4064/sm184-1-1
6. Семенов П. В. Функционально паравыпуклые множества // Математические заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 74–81. http://mi.mathnet.ru/mz2452
7. Ершов А. А., Першаков М. В. О соотношении альфа-множеств с другими обобщениями выпуклых множеств // VI Информ. шк. молодого ученого: сб. науч. тр. Екатеринбург, 2018. С. 143–150. http://doi.org/10.32460/ishmu-2018-6-0017
8. Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и их свойства // Математические заметки. 2006. Т. 79. № 1. С. 60–86. http://doi.org/10.4213/mzm2674
9. Иванов Г. Е., Половинкин Е. С. Второй порядок сходимости алгоритма вычисления цены линейных дифференциальных игр // Доклады РАН. 1995. Т. 340. № 2. С. 151–154. http://mi.mathnet.ru/dan4573
10. Ivanov G. E., Golubev M. O. Strong and weak convexity in nonlinear differential games // IFAC PapersOnline. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 13–18. http://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.345
11. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.
12. Ершов А. А., Ушаков В. Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Математический сборник. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. http://doi.org/10.4213/sm8761
13. Ушаков В. Н., Успенский А. А., Ершов А. А. Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их приложения в теории управления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 261–272. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.307
14. Кувшинов О. А. Программный комплекс для вычисления пересечения двух многоугольников, аппроксимирующих два круга с вырезанными секторами // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Рег. № АААА-Г19-619112690043-6 от 26 ноября 2019 г. https://rosrid.ru/rid/HXS9TT4UKHOYVBFIUID8V8RM

15. Ершов А. А. Программный комплекс для вычисления меры невыпуклости альфа для альфа-множеств // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Рег. № АААА-Г19-619112690042-9 от 26 ноября 2019 г. https://rosrid.ru/rid/83Q4GTFQO5CFTQOWXN0WWZ9N
16. Ушаков В. Н., Успенский А. А. α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 95–120. https://doi.org/10.20537/vm160109

Поступила в редакцию 10.02.2020

Ершов Александр Анатольевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: ale10919@yandex.ru

Кувшинов Олег Александрович, студент, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Цитирование: А. А. Ершов, О. А. Кувшинов. О свойствах пересечения α-множеств // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 79–92.

A. A. Ershov, O. A. Kuvshinov
On properties of intersection of α-sets

Keywords: generalized convex set, α-set, intersection of sets.

MSC2010: 52A01, 11H16

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-06

In this paper, we study the properties of α-sets, which are one of the generalizations of convex sets. In the first part of the paper, the equivalence of two definitions of α-sets in the plane is proved. The second part of the work is devoted to the experimental study of the properties of simply connected intersections of α-sets. It follows from the results of numerical experiments that the value α of the measure of nonconvexity in a simply connected intersection of two α-sets can be greater than the initial value of α in intersected sets even when these values are very close to zero. Based on these results, we can hypothesize that, firstly, such an increase in the value of α is possible with an arbitrarily small initial α for intersected sets, secondly, this increase is limited by a linear function of the initial value of α.

Funding. The reported study was funded by RFBR according to the research project no. 18–01–00221 A. The work was supported by Act 211 Government of the Russian Federation, contract no. 02.A03.21.0006.

REFERENCES

1. Uspenskii A. A., Ushakov V. N., Fomin A. N. *α-sets and their properties*, IMM UB RAS, Ekaterinburg, 2004. 62 p. Deposited in VINITI 02.04.2004, no. 543-B2004 (in Russian).
2. Ivanov G. E. *Slabo vypuklye mnozhestva i funktsii: teoriya i prilozheniya* (Weak convex sets and functions: theory and applications), Moscow: Fizmatlit, 2006.
3. Zelinskii Yu. B. *Vypuklost'. Izbrannye glavy* (Convexity. Selected chapters), Kiev: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 2012.
4. Michael E. Paraconvex sets, *Mathematica Scandinavica*, 1959, vol. 7, no. 2, pp. 312–315. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10583
5. Ngai H. V., Penot J.-P. Paraconvex functions and paraconvex sets, *Studia Mathematica*, 2008, vol. 184, no. 1, pp. 1–29. https://doi.org/10.4064/sm184-1-1
6. Semenov P. V. Functionally paraconvex sets, *Mathematical Notes*, 1993, vol. 54, no. 6, pp. 74–81. https://doi.org/10.1007/BF01209085
7. Ershov A. A., Pershakov M. V. On matching up the alpha-sets with other generalizations of convex sets, *VI Information school of a young scientist*, Central Scientific Library of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2018, pp. 143–150 (in Russian). https://doi.org/10.32460/ishmu-2018-6-0017
8. Ivanov G. E. Weakly convex sets and their properties, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, issue 1–2, pp. 55–78. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0005-y
9. Ivanov G. E., Polovinkin E. S. Second-order convergence of an algorithm calculating the value of linear differential games, *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 51, no. 1, pp. 29–32. https://zbmath.org/?q=an:0876.90110
10. Ivanov G. E., Golubev M. O. Strong and weak convexity in nonlinear differential games, *IFAC PapersOnline*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 13–18. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.345
11. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elementy vypuklogo i sul'no vypuklogo analiza* (Elements of convex and nonconvex analisys), Moscow: Fizmatlit, 2007.
12. Ershov A. A., Ushakov V. N. An approach problem for a control system with an unknown parameter, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352. https://doi.org/10.4213/sm8761
13. Ushakov V. N., Uspenskii A. A., Ershov A. A. Alpha sets in finite-dimensional euclidean spaces and their applications on control theory, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, issue 3, pp. 261–272 (in Russian). https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.307

14. Kuvshinov O. A. A software package for calculating the intersection of two polygons approximating two circles with cut out sectors // Certificate of state registration of a computer program. Reg. no. AAAA-G19-619112690043-6 dated November 26, 2019.
https://rosrid.ru/rid/HXS9TT4UKHOYVBFIUID8V8RM
15. Ershov A. A. A software package for calculating alpha nonconvexity measures for alpha sets // Certificate of state registration of a computer program. Reg. no. AAAA-G19-619112690042-9 dated November 26, 2019. https://rosrid.ru/rid/83Q4GTFQO5CFTQOWXN0WWZ9N
16. Ushakov V. N., Uspenskii A. A. α-sets in finite Euclidean spaces and theor properties, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 95–120 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160109

Received 10.02.2020

Ershov Aleksandr Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Senior Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: ale10919@yandex.ru

Kuvshinov Oleg Aleksandrovich, Student, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Citation: A. A. Ershov, O. A. Kuvshinov. On properties of intersection of α-sets, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 79–92.